平成29年度 中国地方建設技術開発交流会
於:山口県健康づくりセンター　平成29年10月24日

水工学における運動量の定理の贈り物

山口大学工学部 社会建設工学科
羽田野袈裟義

はじめに:

- 運動量は、跳水のようにエネルギー損失が生じる流れでも保存されるため、ベルヌイの定理(エネルギー保存が成立条件)に比べて利用の範囲が広い。
- しかし、運動量の定理は、ベルヌイの定理に比べて多くの技術者が苦手としている。
- 本講演:

1. 運動量の定理の基本を確認
2. 堰と水門の水理に運動量の定理を適用して無次元指標を導出し、指標間の関係を定式化。
3. 流れが鉛直から水平に向きを変える場合への適用

1. 運動量の定理の基本

運動量の定理は、流れの中に固定された任意の流体領域、任意の継続時間について、

（領域内の流体の運動量の増分）＝

（領域境界で出入りする運動量の差引【流入－流出】）

＋（領域内の流体に作用する全ての力による力積）

（1-1a）

図1-1を参照

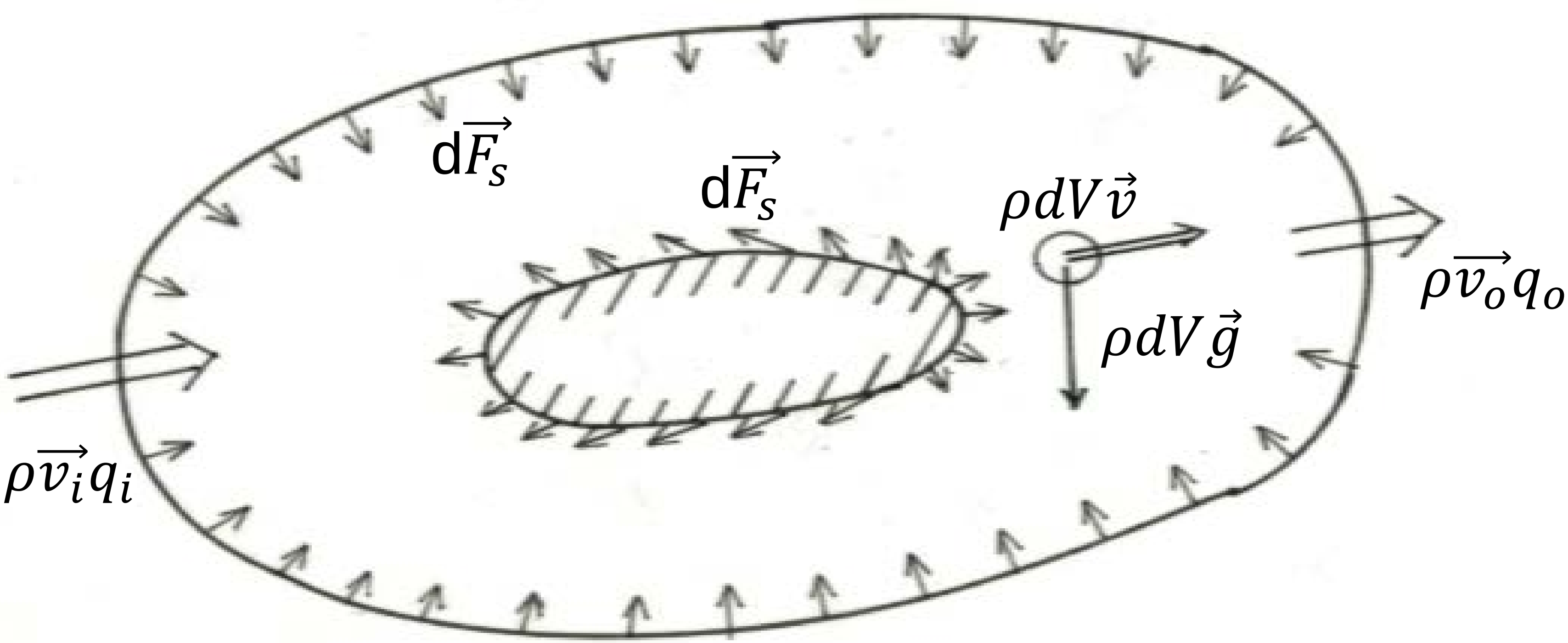


図1-1　流水中の固定領域への運動量の定理の適用

ρ : 水の密度、V : 領域の体積、$\vec{v}$: 領域内の流速、$\vec{g}$: 重力加速度、
$\overrightarrow{v_i}$、$\overrightarrow{v_o}$: 領域境界の流入・出速度、q_i 、q_o : 領域境界の流入・出流量、
$\overrightarrow{F_s}$:領域内部の流体が領域境界で外側から受ける力、
dV : Vの微小要素、$d\overrightarrow{F_s}$:境界の微小要素の$\overrightarrow{F_s}$ 成分

領域内の流体の時刻t～t＋Δtの間の運動量収支式は、

$$(\rho V \overrightarrow{v_a})_{t+\Delta t} - (\rho V \overrightarrow{v_a})_t = (\rho \overrightarrow{v_i} q_i - \rho \overrightarrow{v_o} q_o)\Delta t + \rho V \vec{g} \Delta t + \overrightarrow{F_s} \Delta t \tag{1-1}$$

$\overrightarrow{v_a}$:領域内の流体の空間平均速度

$\rho \overrightarrow{v_i} q_i$ 、$\rho \overrightarrow{v_o} q_o$: 領域境界での運動量の流入･出のフラックス（運動量の単位時間の通過量）

式(1-1)の左辺は次式に書ける。

$$(\rho V\overrightarrow{v_a})_{t+\Delta t} - (\rho V\overrightarrow{v_a})_t = \left(\frac{\partial(\rho\overrightarrow{v_a}V)}{\partial t}\right)_t \Delta t \qquad (1\text{-}2)$$

故に式(1-1)は次式となる。

$$\left(\frac{\partial(\rho\overrightarrow{v_a}V)}{\partial t}\right)_t \Delta t = (\rho\overrightarrow{v_i}q_i - \rho\overrightarrow{v_o}q_o)\Delta t + \rho V\vec{g}\Delta t + \overrightarrow{F_s}\Delta t \qquad (1\text{-}3)$$

共通因子Δtで割ると、

$$\left(\frac{\partial(\rho\overrightarrow{v_a}V)}{\partial t}\right)_t = (\rho\overrightarrow{v_i}q_i - \rho\overrightarrow{v_o}q_o) + \rho V\vec{g} + \overrightarrow{F_s} \quad \text{(1-4)}$$

運動量フラックスと力は力学的に同等。
各方向の成分ごとについて成り立つ。

定常流の場合

式(1-4)の左辺はゼロ、q_i ＝q_o＝ q とおける。
したがって、式(1-5)より

$$(\rho\overrightarrow{v_o} - \rho\overrightarrow{v_i})q = \rho V\vec{g} + \overrightarrow{F_s} \qquad (1\text{-}5)$$

式(1-5)の示唆：定常流の場合、
（領域境界で流出する運動量フラックス）
　　－（領域境界で流入する運動量フラックス）
　　　　　　＝流体への作用力の合計

乱暴な比喩：学制に変化がなくかつ偏差値の変化が少ない学校では、
（卒業生全体の学力エネルギー）
　　－（入学生全体の学力エネルギー）＝（学校教育）

２. 運動量の定理に基づく堰と水門の水理の検討

主要な論点と結果:

- （エネルギー損失を無視した）ベルヌイの定理に基づく従来の堰と水門の流量評価式の矛盾を指摘。
- 流水抵抗を考慮した運動量の定理に基づき、堰と水門の水理を支配する無次元パラメータを導出。
- 運動量の定理から導かれた無次元指標間の関係を、既往の実験結果を用いて調べ、定式化。

主要な結果:

刃形堰:

- **完全越流:堰高h_d、越流水深h、限界水深h_cの間に図2-3の関係**
- **潜り越流:下流水位h_2、上流水位h_1、完全越流時越流水深hの間に図2-4の関係**

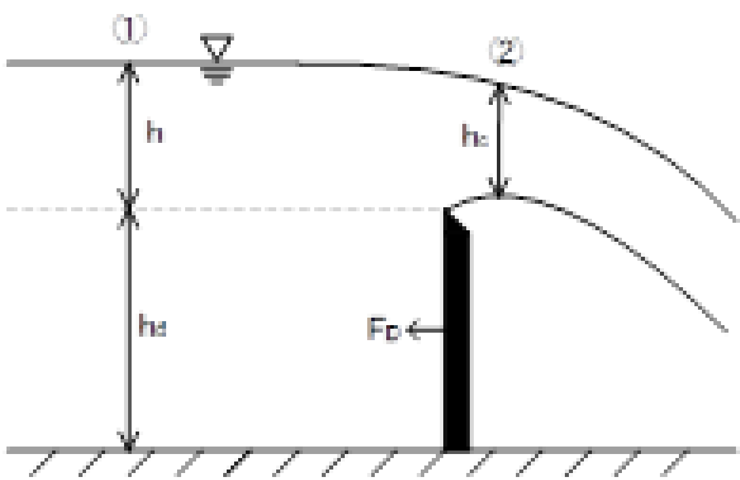


図2-1　完全越流刃形堰の模式図

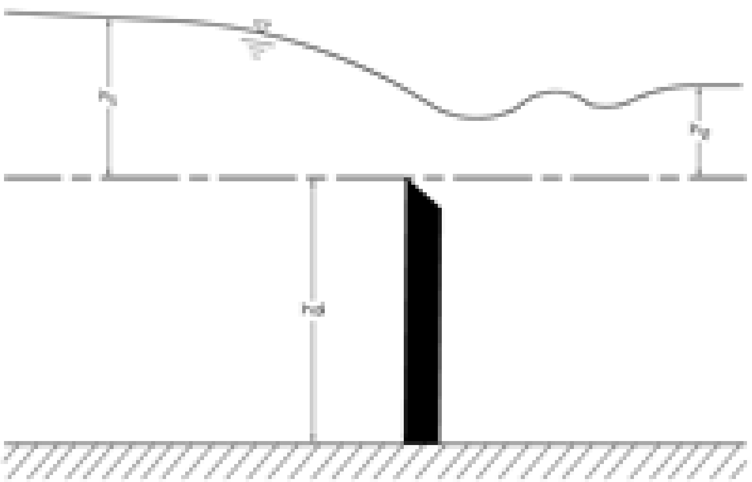


図2-2　刃形堰の潜り越流の模式図

主要な結果:

刃形堰:

- 完全越流:堰高h_d、越流水深h、限界水深h_cの間に図2-3の関係
- 潜り越流:下流水位h_2、上流水位h_1、完全越流時越流水深hの間に図2-4の関係

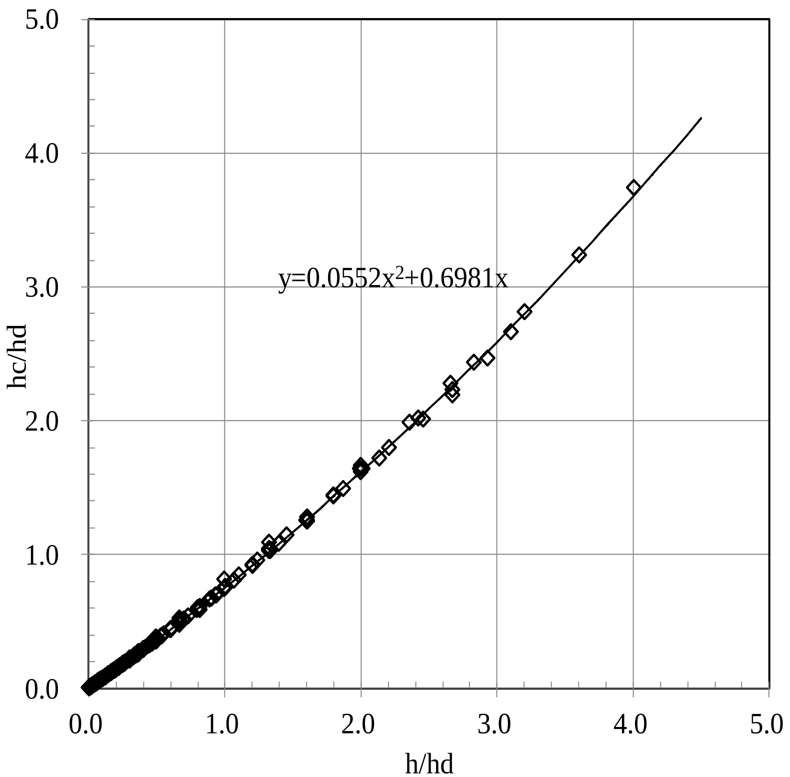


図2-3 完全越流のh/h_dとh_c/h_dの関係

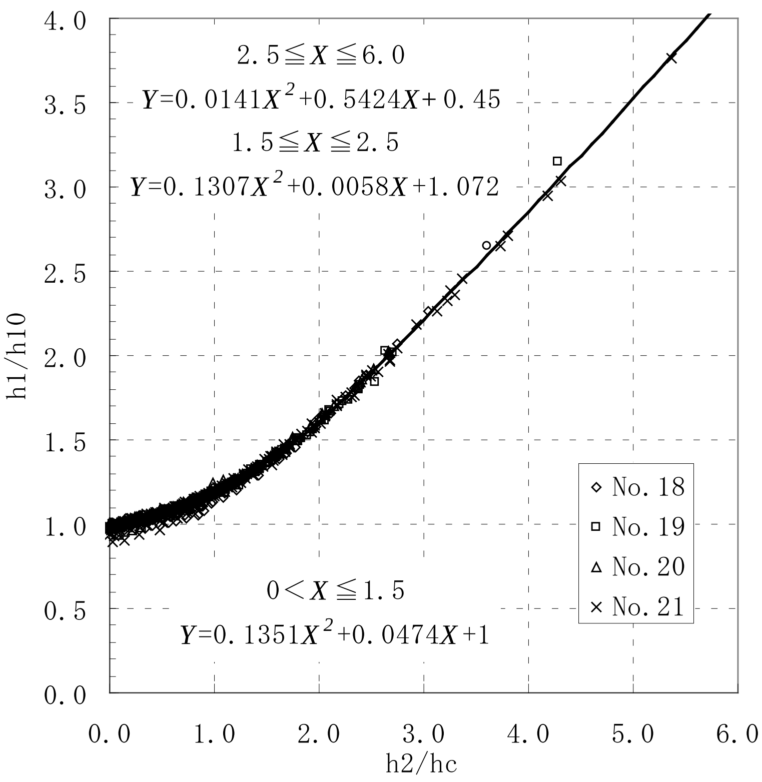


図2-4 潜り越流のh_2/hcとh_1/h関係

主要な結果:

スルースゲート:

- **スルースゲート: 自由流出について図2-6、図2-7の関係**

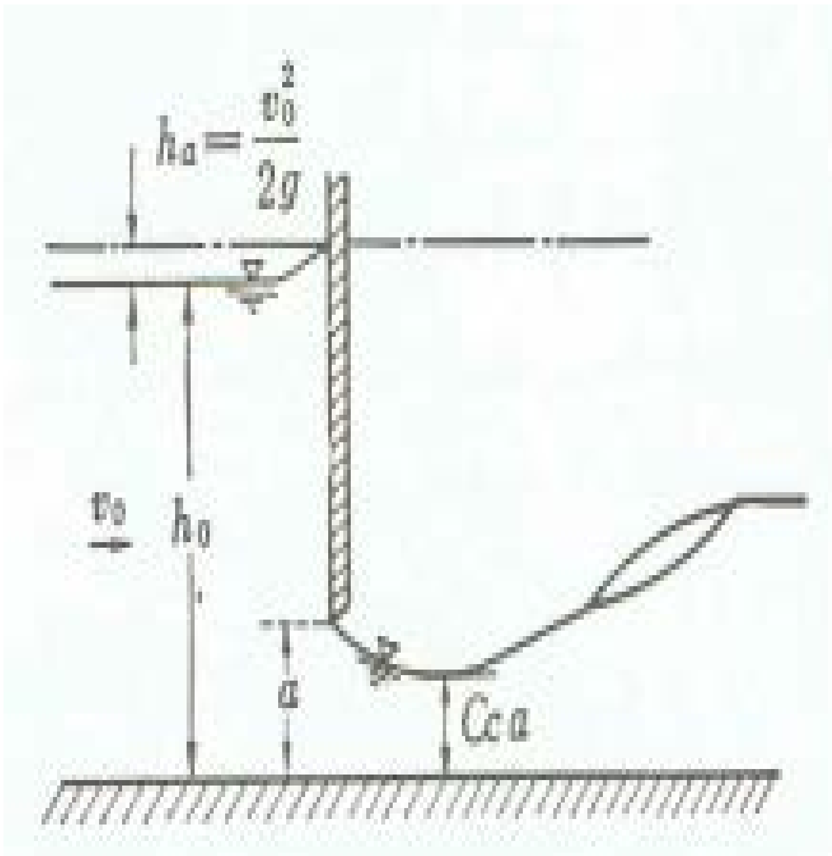
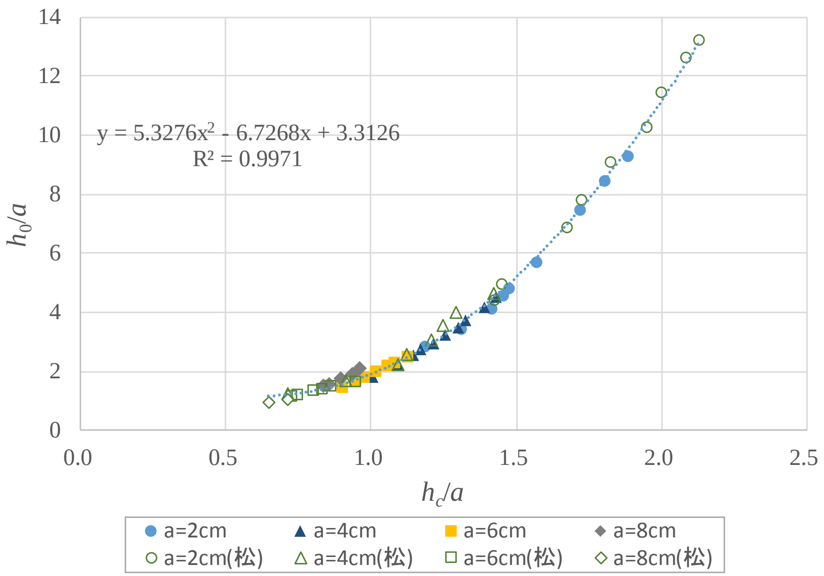


図2-5 スルースゲート自由流出
の模式図

スルースゲートからの自由流出の主要な結果



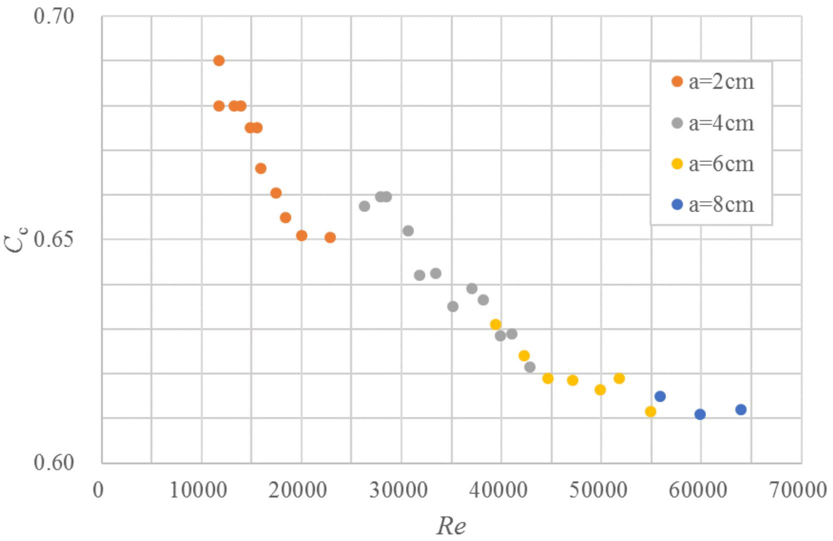


図2-6　スルースゲートh_0/aとhc/aの関係

hc/a :無次元流量、h_0/a :無次元上流水深

図2-7　縮流係数C_Cと$Re=q/v$の関係

2.1　運動量の定理の刃型堰越流への適用

潜り越流と完全越流の模式図

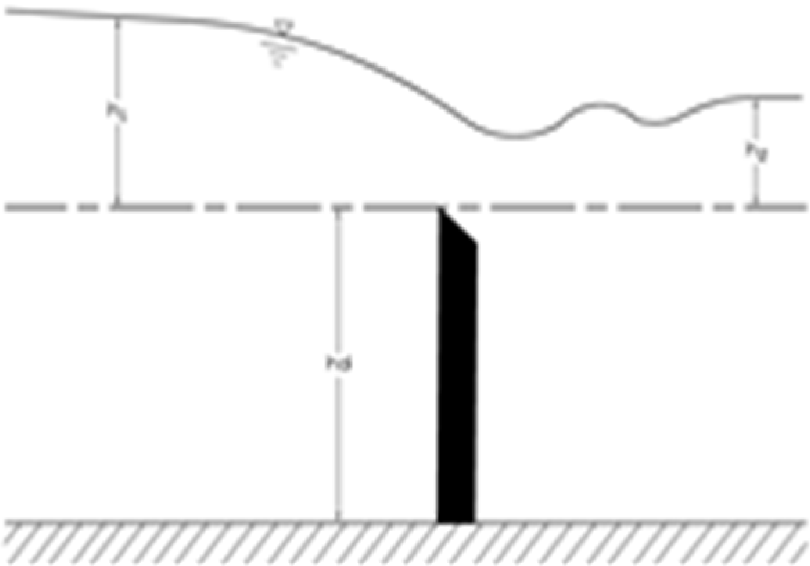


図2-8　潜り越流

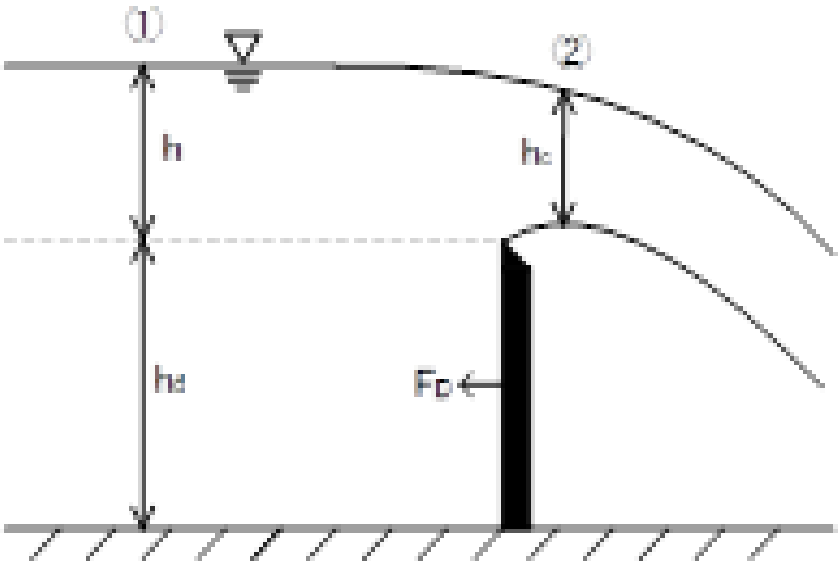


図2-9　完全越流

ρ : 水の密度、g : 重力加速度 、q : 単位幅流量、

h_d : 堰高、h_1、h_2 : 堰上流・下流の水位（堰頂基準）、

F_D : 堰の流水抵抗（単位幅）

2.1 運動量の定理の刃型堰越流への適用

堰の上・下流の断面の間の水に対する運動量の式は

$$\rho q^2 \left[\frac{1}{h_d + h_2} - \frac{1}{h_d + h_1} \right] = \frac{1}{2} \rho g (h_d + h_1)^2 - \frac{1}{2} \rho g (h_d + h_2)^2 - F_D \quad (2\text{-}1)$$

ρ : 水の密度、g : 重力加速度 、q : 単位幅流量、

h_d : 堰高、h_1、h_2 : 堰上流・下流の水位（堰頂基準）、

F_D : 堰の流水抵抗（単位幅）

$F_D = K_D \cdot 1/2 \cdot \rho g h_d 2$ (K_D は流体力係数）と置くと、

$$K_D = \left(1 + \frac{h_1}{h_d}\right)^2 + \left(1 + \frac{h_2}{h_d}\right)^2 + 2\left(\frac{h_c}{h_d}\right)^3 \left[\frac{1}{1+\frac{h_1}{h_d}} - \frac{1}{1+\frac{h_2}{h_d}}\right] \quad (2\text{-}2)$$

$hc = (q_2/g)1/3$ は限界水深（単位幅流量の別表現）。

式(2-1)は$h_2 < 0$でも成り立つから完全越流にも適用される。

式(2-2)より、刃形堰では、K_D の特定の値に対して3つの無次元指標h_1/h_d、h_2/h_d、h_c/h_dの間に一定の関係がある。

完全越流の場合、h_2は関与しない ⇒ h_1/h_dとh_c/h_dの関係。
この場合、h_1＝h（越流水深）。したがって、

$$\frac{h}{h_d} = f_1\left(\frac{h_c}{h_d}\right) \qquad (2\text{-}3)$$

Shoder & Turnerの実験結果

堰高　　　0.30～2.28m

越流水深　0.03～0.83m

h_1/h_dとh_c/h_dの関係が普遍的

$$y = 0.0552x^2 + 0.6981x \quad (2\text{-}4)$$

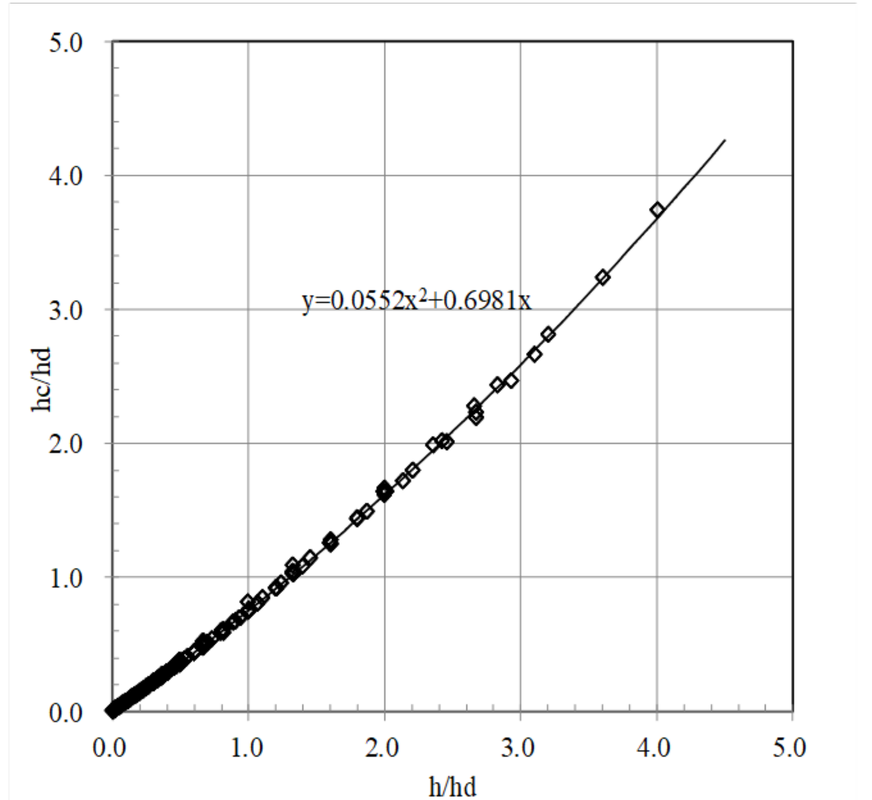


図2-10　hc/hdとh/hdの関係

刃形堰の潜り越流

興味：特定の堰で、流量を固定し、堰下流水位を上げた時、堰上流水位 h1 の完全越流時の値h (越流水深)からの上昇程度。

この究明のため、h1 をh により表現する式を求めるよう、KDの式：式(2-2)中の無次元指標を組み替える。

3つの無次元指標h_1/h、h_2/h_c、h_c/h_dのうちh_1/h_dとh_2/h_dは、

$$\frac{h_1}{h_d} = \frac{h_1}{h}\frac{h}{h_d} = \frac{h_1}{h} f_1\left(\frac{h_c}{h_d}\right) \qquad (2\text{-}5)$$

および

$$\frac{h_2}{h_d} = \frac{h_2}{h_c}\frac{h_c}{h_d} \qquad (2\text{-}6)$$

式(2-5)と(2-6)から、堰高の効果は h_c/h_d とh_1/h_dのみに集約される。

また、式(2-2)中の3つの無次元指標の間の関係は、次の関係に変換される。

h_1/h、h_2/h_c、h_c/h_d ⇒ h_1/h、h_2/h_c、h_c/h_d

h_2/hc～h_1/hの関係

右図は、Glen Coxの刃形堰上の潜り越流の実験データ

堰番号	堰高(m)	hc(m)
No.18	0.347	～0.231
No.19	0.610	～0.295
No.20	0.991	～0.206
No.21	1.870	～0.322

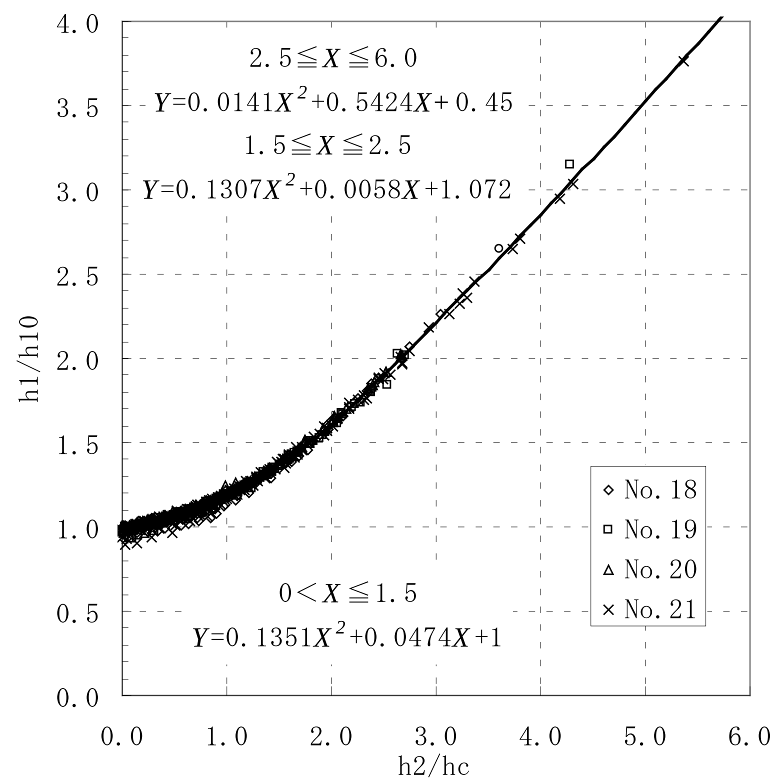


図2-11　h2/hc～h1/hの関係

h_2/hc～h_1/hの関係は普遍的：

h_c/hdによらない。

定式化:

$$h_1/h = A\left(h_2/h_c\right)^2 + B\left(h_2/h_c\right) + C \qquad (2\text{−}7)$$

A, B, Cは h_2/h_cの範囲に応じて次の値

① $0 \le h_2/h_c \le 1.5$; A=0.135, B=0.047, C=1.0

② $1.5 \le h_2/h_c \le 2.5$; A=0.131, B=0.006, C=1.072

③ $2.5 \le h_2/h_c \le 5.5$; A=0.014, B=0.542, C=0.460

参考:板谷・竹中の公式

(0.15＜h2/h1＜0.85)

$$Q = c\sqrt{2g}\,h_1\sqrt{h_1 - h_2} \qquad c = 0.317 + \frac{0.19}{1.6 - h_2/h1} \qquad (2\text{−}8)$$

参考：潜り堰の流量公式との比較

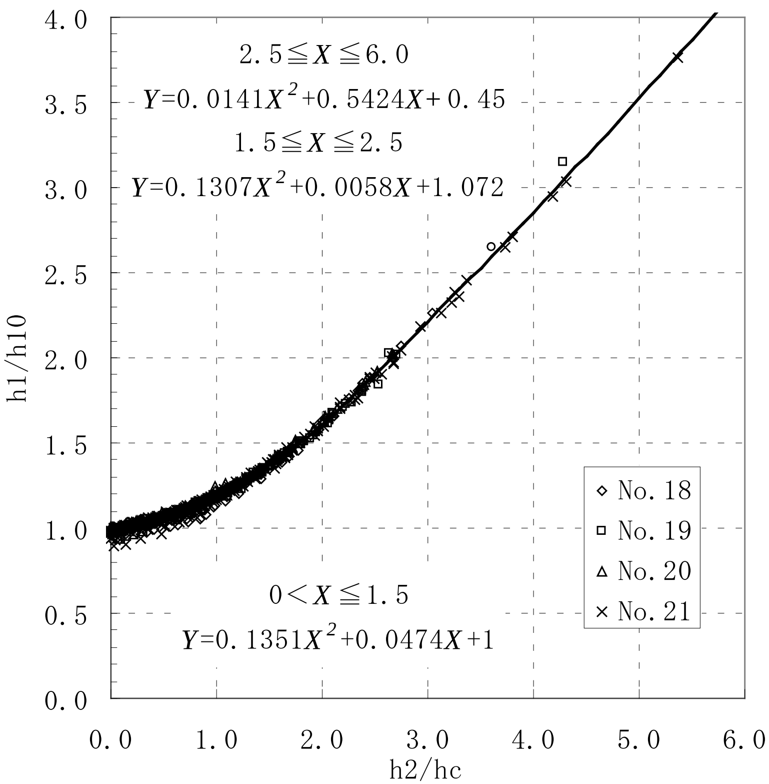


図2-12 刃形堰の潜り越流の関係

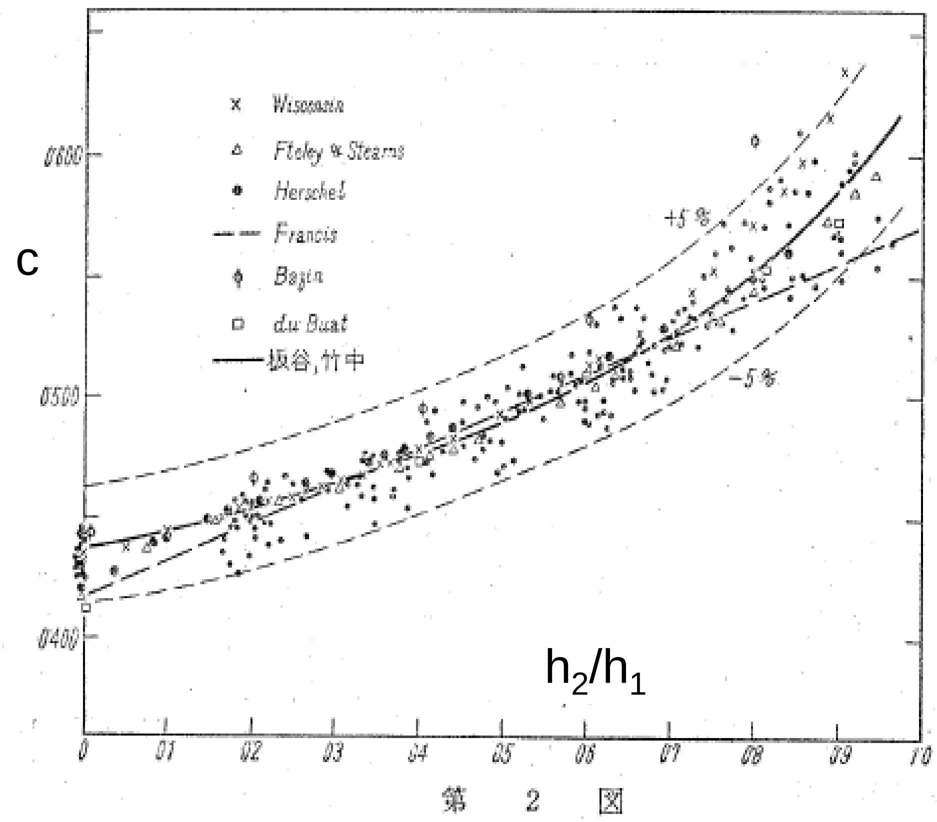


図2-13 参考：板谷・竹中の式

C ～ h_2/h_1 の関係

$Q=c(2g)^{1/2}h_1(h_1-h_2)^{1/2}$；（$H_1=h_1$，$H_2=h_2$）

機械学会論文集、第19巻、第81号(1953)

完全越流：完全越流の設定（図2-14）に基づく検討

断面①と断面②の間の水塊に運動量の定理を適用，

$$\rho\left(\frac{q^2}{h_c}-\frac{q^2}{h_d+h}\right)=\frac{1}{2}\rho g(h_d+h)^2-F_D \qquad (2\text{-}9)$$

q, hc, g ：慣用記号，F_D：単位幅の堰の抵抗力．

$F_D = K_D \cdot 1/2 \cdot \rho g h_d^2$　と置くと，

$$K_D=-\frac{2h_c^{\ 2}}{h_d^{\ 2}}+\frac{2h_c^{\ 3}}{h_d^{\ 3}}\frac{1}{(1+h/h_d)}+(1+h/h_d)^2$$

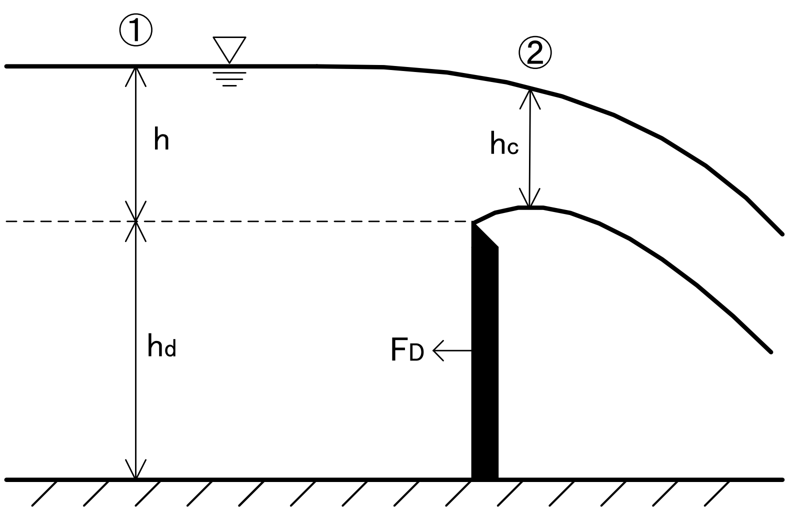


図2-14　刃形堰上の完全越流

越流水深／堰高比h/h_dと限界水深／堰高比h_c/h_dの関係は？

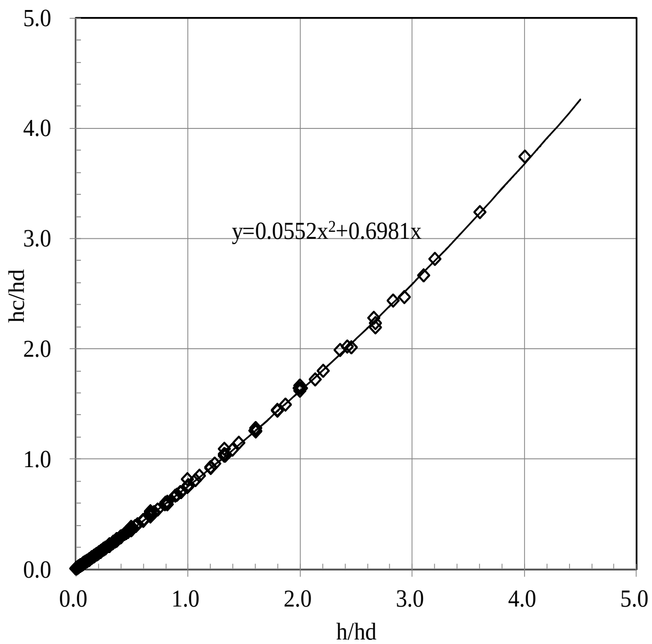


図2-15　h/h_dとh_c/h_dの関係
（完全越流・刃形堰）

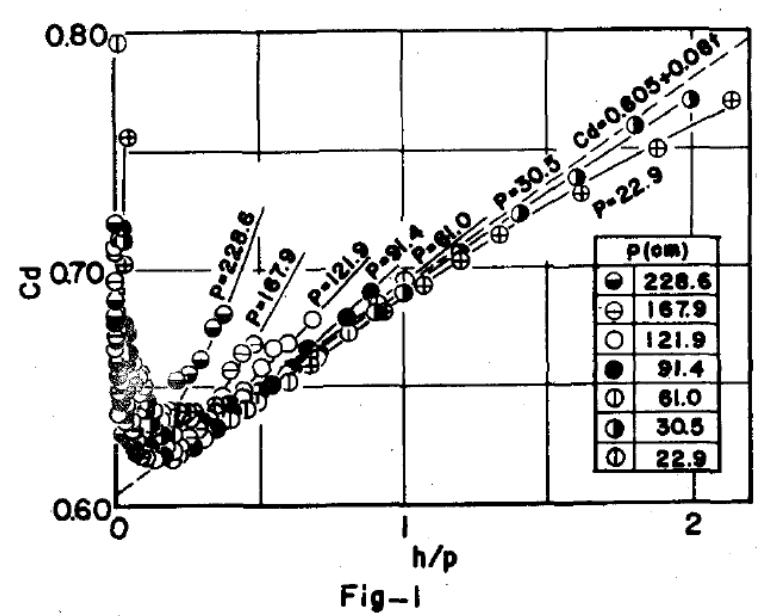


図2-16　C_d～h/h_dの関係（中川ら1966）

定式化：$h_c/h_d = \alpha (h/h_d)^2 + \beta (h/h_d)$　（2−10）

（$\alpha = 0.0552$，$\beta = 0.6981$）

$$\frac{h}{h_d} = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha (h_c/h_d)}}{2\alpha} \qquad (2-11)$$

参考：修正レーボック式

$$Q = Cd \times \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,bh^{3/2}$$

2.2　運動量の定理に基づくゲートの水理検討

スルースゲートからの流出を図2-17にモデル化.

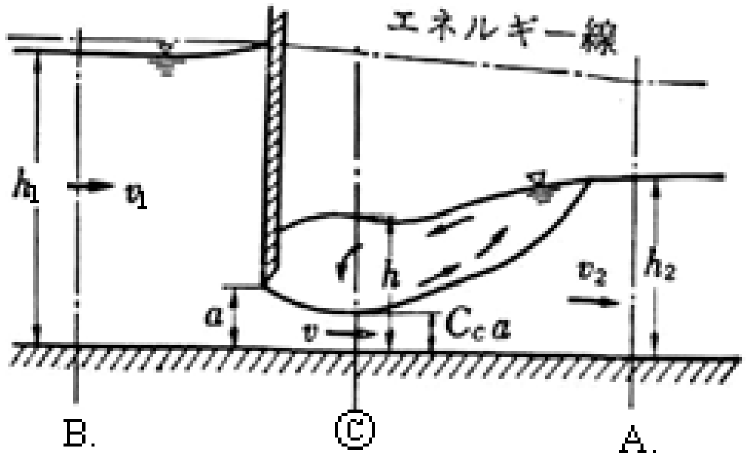


図2-17　ゲートからの流出の模式図

単位幅流量を q, ゲート開度を a , ゲート上流の水深を h_1,

下流の水深を h_2 , 単位幅当たりの抵抗力を F_D .

断面BとAの間の流体部分に運動量の定理を適用;

$$\rho\left(\frac{q^2}{h_2}-\frac{q^2}{h_1}\right)=\frac{1}{2}\rho g h_1^{\,2}-\frac{1}{2}\rho g h_2^{\,2}-F_D \qquad (2\text{−}12)$$

$$F_D = K_D \frac{1}{2}\rho g(h_1 - a)^2$$ と置くと，

$$K_D = \frac{2q^2}{g(h_1-a)^2}\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)+\left(\frac{h_1}{h_1-a}\right)^2-\left(\frac{h_2}{h_1-a}\right)^2$$

$$= \frac{2q^2}{ga^3(h_1/a-1)^2}\left(\frac{a}{h_1}-\frac{a}{h_2}\right)+\left(\frac{h_1/a}{h_1/a-1}\right)^2-\left(\frac{h_2/a}{h_1/a-1}\right)^2 \quad (2\text{–}13)$$

$(q^2/ga^3 =)h_c^3/a^3$， h_1/a， h_2/a の間に関係?

$$\frac{h_1}{a} = F_1\left(\frac{h_c}{a}, \frac{h_2}{a}\right) \quad (2\text{–}14)$$

自由流出のゲート上流水深をh_0には，h_2 が関与しないから，

$$\frac{h_0}{a} = F_0\left(\frac{h_c}{a}\right) \quad (2\text{–}15)$$

実験結果：

流量と上流水深の関係

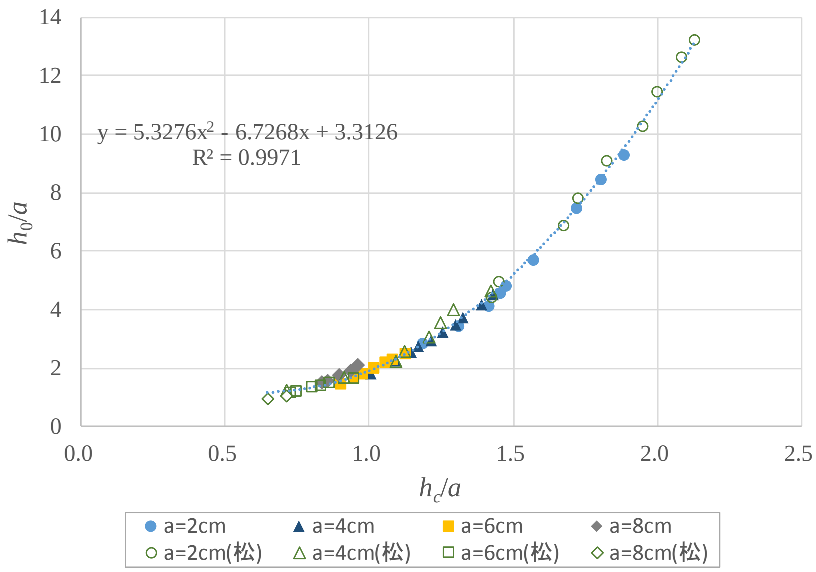


図2-18　h_0/aとhc/aの関係

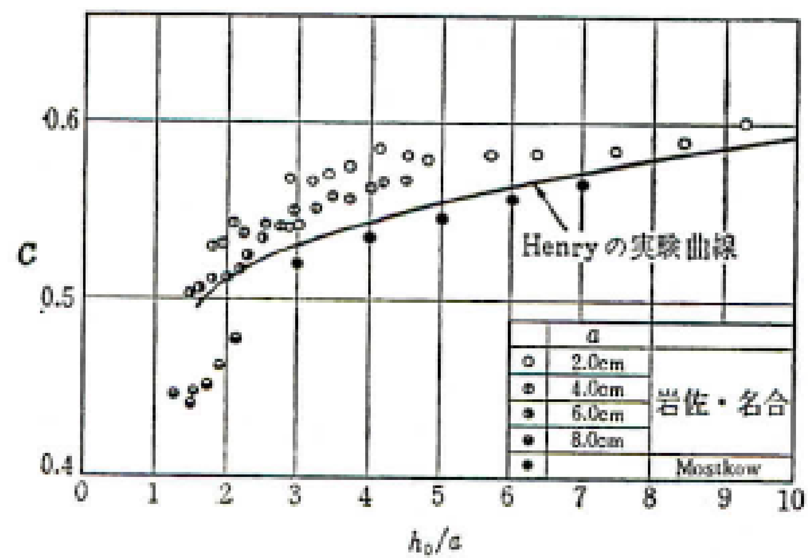


図 3.3　スルース・ゲートの流量係数

図2−19　参考：流量係数の整理結果

水理公式集、昭和46年版、p.276

図2−21のa=2cm、a=4cm、a=6cm、a=8cmは共通データ）

上流水深の評価式:

$$\frac{h_0}{a} = A\left(\frac{h_c}{a}\right)^2 + B\left(\frac{h_c}{a}\right) + C \qquad (2\text{-}16)$$

$$A = 5.3276, B = -6.7268, C = 3.3126$$

流量の評価式:

$$\frac{h_c}{a} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4A(h_0/a - C)}}{2A} \qquad (2\text{-}17)$$

h_c ⇒ $q^2/g = h_c{}^3$ ⇒ 単位幅流量q.

縮流係数

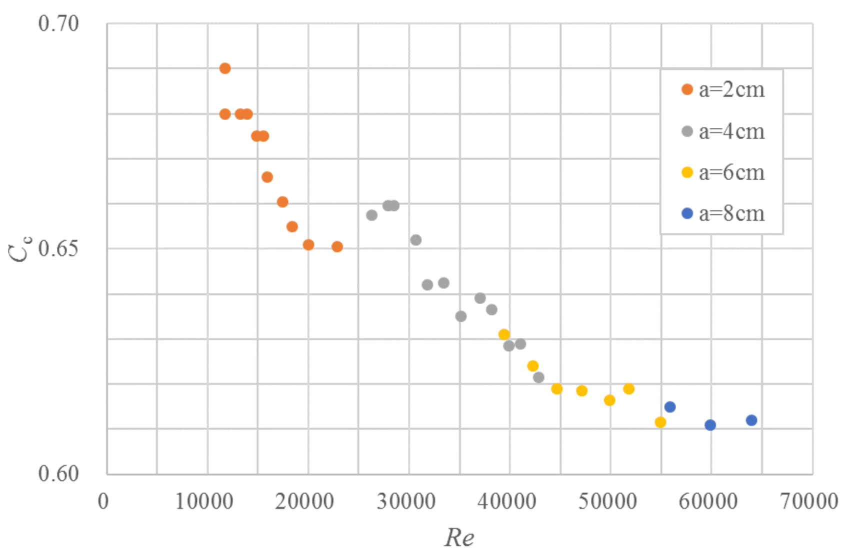


図2-20　縮流係数C_Cと$Re=q/\nu$の関係

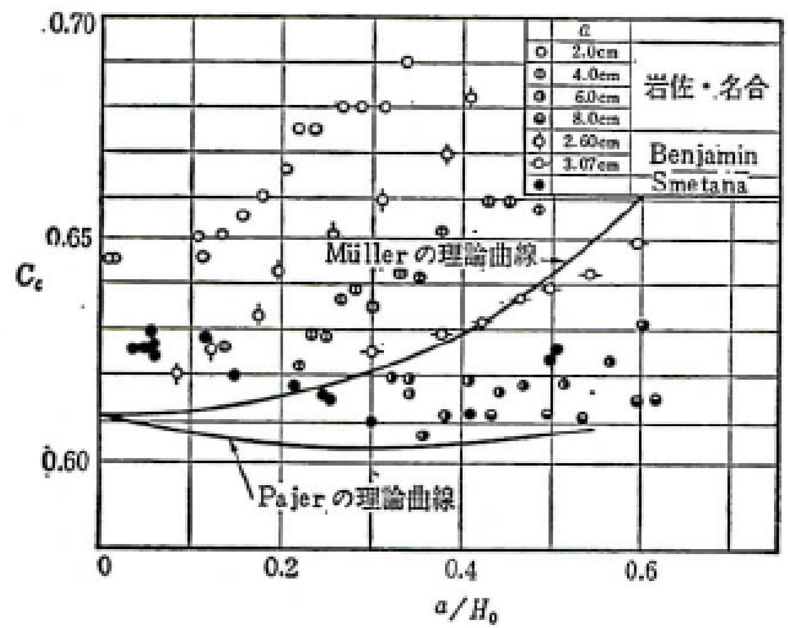


図 3.2 収 縮 係 数

図2-21　参考：縮流係数の既往の資料

水理公式集、昭和46年版、p.276

（図2-19のa=2cm、a=4cm、a=6cm、a=8cmは共通データ）

2.3　結語

主要な結果

（1） 刃形堰の完全越流の水位～流量の間の普遍的な関係
（2） 刃形堰の潜り越流の水位～流量の間の普遍的な関係
（3） スルースゲートの流量～上流水深の間の普遍的な関係
（4） スルースゲートの縮流係数

今後

（1） Ogee堰、広頂堰の問題
（2） スルースゲートの自由流出の限界
（3） スルースゲートの潜り流出の定式化
（4） テンターゲートの水理

3.噴射式DO改善装置への適用

3.1 背景

水の貧酸素化（水中溶存酸素濃度の低下）

ダム湖や内湾：水生生物の斃死、水環境悪化

下水中の硫化水素、下水道管の劣化

水中溶存酸素濃度の回復
水質悪化した水の容器内への噴射により気泡集合体を形成し、全て薄い液膜になって酸素を溶かし込む

気泡集合体
多数の気泡が薄い液膜を介して共存する状態
（コップにビールを注いだ時の表層の泡群）

図3-1 水の噴射による液膜生成

3.2　液膜内のガス成分の移動の素過程分析

液膜状態の液膜の中のガス成分の移動を分析

Jは酸素ガスの移動のフラックスは、

DO濃度（気相）＞DO濃度（液相）

だから

⇒　気相→液相の酸素移動

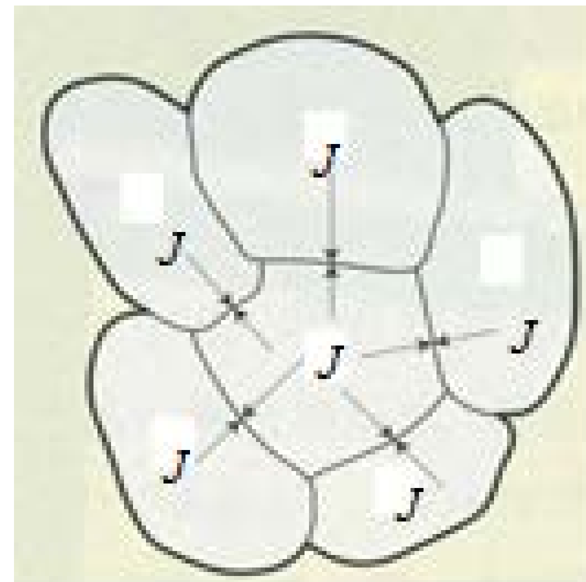


図3-2 貧酸素水への酸素供給

3.3 噴射による液膜生成容器内の気泡体積の評価

運動量の定理により検討

噴射された水は最終的に溢流（越流水深h ）する
水流の連続条件：噴射流量と溢流量が等しい

仮定：液膜生成容器内の圧力分布は、
比重1の水が越流水深の高さまで満たすときの
静水圧に等しい

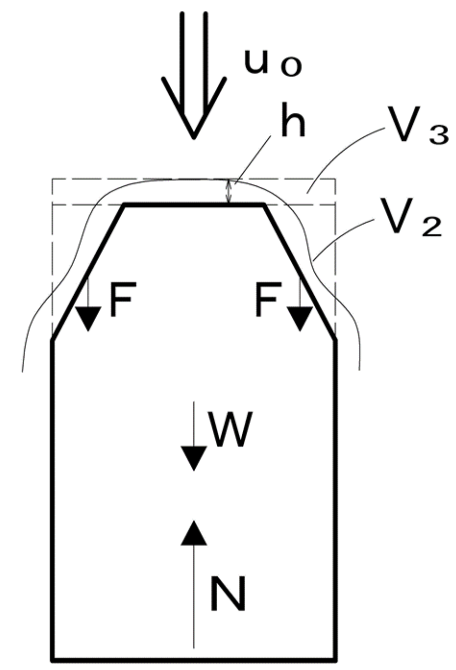


図3-3 流れの状況と作用力

Q: 噴射流量

u_0: 噴射速度

ρ: 水の密度

V: 液膜生成領域の全体積

V_g: 気体の全体積

V_l: 液体の体積

N: 清水を越流水深の高さまで満たすときの水の静水圧の合力＝容器底が水塊を上向きに押す力

F: 円錐台天井に作用する静水圧の合力

＝円錐台天井が容器内の水塊を下向きに押す力

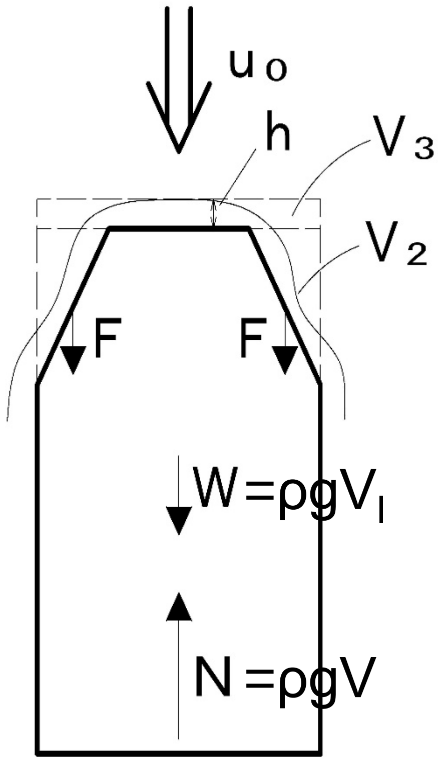


図3-3 流れの状況と作用力

鉛直方向の運動量の式

$$\rho u_1 Q - \rho u_0 Q = -\rho g V + \rho g V_l + F \quad (3.1)$$

u_1は流出速度の鉛直成分、容器上端で溢流するので$u_1=0$

$$-\rho u_0 Q = -\rho g V + \rho g V_l + F$$

$$u_0 Q = gV - gV_l - \frac{F}{\rho}$$

$$\frac{u_0 Q}{g} = V - V_l - \frac{F}{\rho g}$$

$$V_g = V - V_l = \frac{u_0 Q}{g} + \frac{F}{\rho g} \quad (3.2)$$

気体体積V_gは噴射を急遮断して静置して流体体積V_lを測定して得られる

Fの評価

容器内の圧力は越流水深hまで満たす水の静水圧と仮定するので、Fは図中の体積V_2とV_3を用いて

$$F = \rho g (V_2 + V_3) \quad (3.3)$$

体積V_2の評価

$$V_2 = \frac{\pi d^2}{4} H - \frac{\pi H}{3}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_u}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d_u}{2}\right)\right] \quad (3.4)$$

d：液膜生成器の円筒部直径
H：円錐台の高さ
d_u：容器上端の内直径

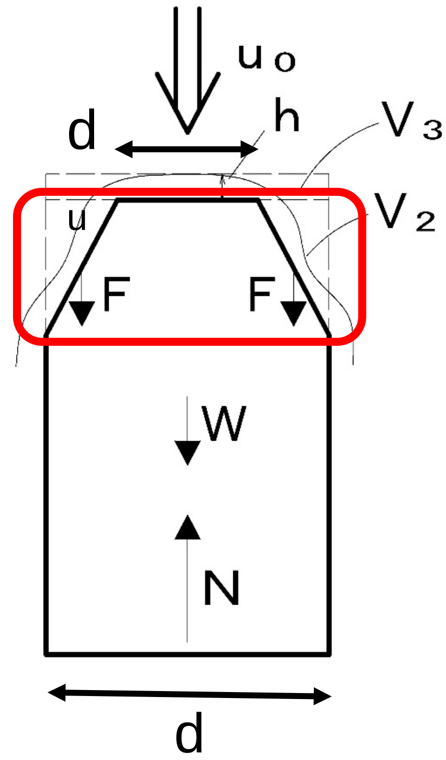
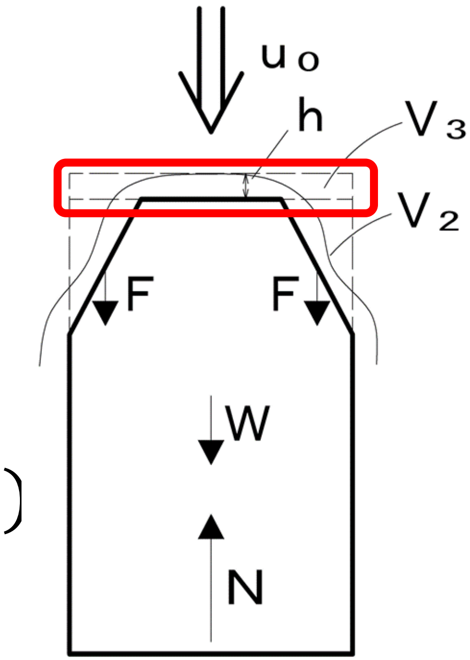


図3-4　流れの状況と作用力

体積V_3の評価

越流水深hは、刃型堰水理の研究結果（式(2-11)）を適用して

$$h=\left[\frac{-b+\sqrt{b^2+\frac{4ah_c}{h_d}}}{2a}\right]h_d \quad (3.5)$$



ただし、係数a、bの値はそれぞれa=0.0552、b=0.6981

h_d：容器底から越流部までの高低差

h_c：限界水深

$$h_c=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{Q^2}{g\pi^2 {d_u}^2}} \quad (3.6)$$

以上より

$$V_3=\frac{\pi d^2 h}{4} \quad (3.7)$$

3.4　実験による検証

(a)<u>実験装置</u>

容器: 下部(円筒)+上部(円錐台)
下部(円筒): 内直径45cm
高さ100cm
上部(円錐台): 下端内直径45cm
上端内直径23.5cm
高さ18.5cm
ホース: 内径5cm
圧力測定位置～ノズル間距離
140cm

図3-5 装置の全景

(b)実験状況

図3-6 気泡集合体の発生状況

図3-7 容器内の液膜の拡大写真

Fig.12 容器内の気相の全体積の比較

ノズル～容器上端間の高低差16～24cm変化して実験

（計算値）≒（実験値）で割合よい一致

ただし実験値が若干大きい

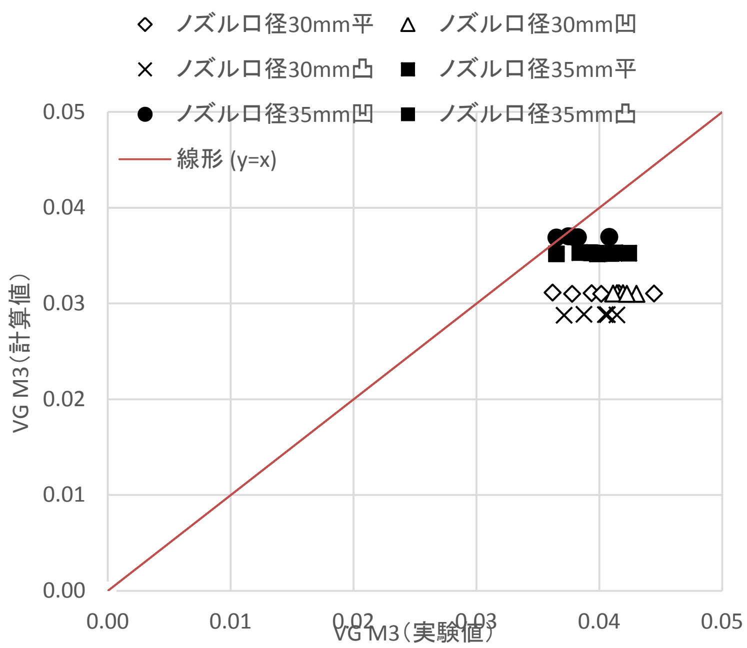


図3-8 容器内の気体体積の計算値と実験値の比較

４．結語

以上、運動量の定理の基本的な考え方を説明して基本式を示した。

また、堰と水門をすぎる流れへの適用、鉛直から水平へと向きを変える場合（噴射式DO改善技術の基本的機構）への適用について説明した。

今後、多くの水工技術者が運動量の定理に馴染んで頂くことを期待します。また、これまでベルヌイの定理に基づいて検討されてきたことに適用を試みられることを期待します。

ご静聴有難うございました。