Discontinuous Galerkin 法に基づく界面捕捉法による自由表面流れ解析手法の開発

田中聖三 [1)]

[1)]広島工業大学工学部環境土木工学科

This paper present the discontinuous Galerkin method for advection equation in tsunami wave propagation analysis based on interface capturing approach. The linear discontinuous Galerkin method applied to advection equation to resolve the mass balance problem on continuous Galerkin method with mass conservation scheme. As for the numerical example to verify the present method, The rotating square hill problem was carried out. The present method obtained good mass conservation.

キーワード：*Discontinuous Galerkin method, Advection equation, Interface capturing approach*

1. はじめに

津波や洪水に代表される水害は，被害範囲が広く，人的や経済的に甚大な被害を引き起こす．これらの被害を低減するためには，あらかじめ発生しうる災害規模を設定し，その災害の状況を予測し，それらに対する対策を講じることが必要となる．水害の被害を予測する上では，その浸水域や建物に作用する力を把握する必要があり，数値解析においては，時々刻々と変化する自由表面を取り扱う方法が必要となる．自由表面流れ問題に対する数値解析手法は，これまでに数多く提案されているが，その中の代表的な手法として VOF(Volume of Fluid) 法 [1] がある. VOF 法では流体の基礎方程式は Euler 記述された方程式を用い，空間的に固定された解析座標により解析を行う方法である．その際，移動境界である自由表面は，体積占有率を表す VOF 関数の分布により表現され，この VOF 関数を移流方程式などにより移動させることにより，自由表面の移動を取り扱う．VOF 法では，VOF 関数により自由表面は間接的に表現されるため，その関数の分布の特性 (不連続性) が失われると，自由表面位置が不明瞭となってしまうことが短所となる．このため，VOF 関数の更新を行うための移流方程式の解法は，高精度であることが要求される．さらに VOF 関数の不連続性を維持する必要がある．上記の要求に対する数値解析手法として，SUPG 法に基づく安定化有限要素法や CIP 法があるが，VOF 関数の特徴である不連続性を維持し続けることは困難であり，この性質を回復させる方法として，質量保存を満たしながら補正する手法も提案されている (例えば [2][3]). これらの方法は非常に有効的な方法であるが，解析メッシュの解像度が一定で，現象に対して十分に分割されていることが前提となるため，計算コストを削減するために，解析メッシュの粗密付けを行うと，不具合が生じる可能性がある．一方，近年，要素ごとに定義される不連続な近似関数を用いる Discontinuous Galerkin (DG) 法が提案されている．DG 法においても界面での不連続性は失われるが，局所的な質量保存を満たすような補正を行うことが可能であり，VOF 関数の不連続性を維持しつつ，質量保存を満たすような解法となる可能性がある．

そこで本論文は, 自由表面流れ解析手法の構築を研究背景とし，VOF 法における移流方程式の解法に DG 法の適用し，その有効性について検討を行うものである．数値解析例として，2 次元平面 2 領域における矩形分布の回転移流問題を取り上げる．従来の方法である安定化有限要素法と体積補正手法を組み合わせた方法と比較を行い，DG 法による解析精度と質量保存性について確認する．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

界面関数 ϕ の挙動は以下の移流方程式に支配される．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \qquad \text{on } \Omega \tag{1}$$

ここで $\mathbf{u}$ は流速である．

(2) CG 法による離散化

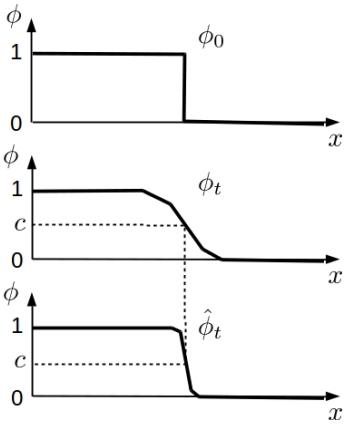
従来の離散化方法である CG(Continuous Galerkin) 法として，安定化有限要素法による方法を示す．基礎方程式 (1) に対して，SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用し，以下の重み付き残差方程式が得られる．

$$\int_\Omega w \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} (\tau \mathbf{u} \cdot \nabla w) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) d\Omega = 0 \tag{2}$$

ここで，τ は安定化パラメータである．

上記の方程式を空間方向へ三角形 1 次要素を用い，時間方向に Crank-Nicolson 法を用いて離散化し，連立 1 次方程式を解くことにより，界面を時間進展させる．時間進展とともに低下する界面の不連続性を回復させるため，各時刻において，解析領域内での体積保存を考慮した界面鋭敏化手法 [2] を適用する．

$$\hat{\phi} = a^{1-\alpha} \phi^\alpha, \qquad 0 \geqq \phi \geqq c, \tag{3}$$



図–1 質量保存を考慮した界面鋭敏化方法

$$\hat{\phi} = 1 - (1-c)^{1-\alpha}(1-\phi)^{\alpha}, \qquad c \leqq \phi \leqq 1. \tag{4}$$

ここで，α は鋭敏化の強度を設定するパラメータであり，本論文では 1.1 を用いている．また，c は鋭敏化を行う値であり，図-1 の鋭敏化モデルに示されるように，この値以上の ϕ の領域は 1.0 へ，以下の領域は 0.0 へ近づくように補正される．a は解析領域全体での質量保存を満足するように決定される．

$$Mc^{1-\alpha} - N(1-c)^{1-\alpha} = R, \tag{5}$$

ここで，M, N, R は以下の式で表される

$$M = \rho_a \int_{\Omega} c^{\alpha} d\Omega, \qquad 0 \leqq \phi \leqq c \tag{6}$$

$$N = \rho_a \int_{\Omega} (1-c)^{\alpha} d\Omega, \quad c < \phi \leqq 1 \tag{7}$$

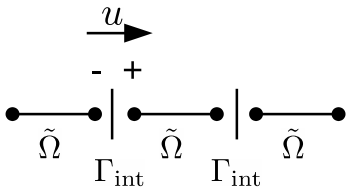
$$R = m_a - \rho_a \int_{\Omega} d\Omega, \qquad a < c \leqq 1 \tag{8}$$

この手法は，質量保存を満たしながら界面鋭敏化を施すことのできるとても有効な方法である．しかしながら，前提条件として，界面近傍の解像度が一定であることがあり，計算効率などの理由により，解析メッシュの解像度が粗密化されていると，誤差が界面に沿って平均化されてしまうという問題がある．この問題は，この手法が解析領域全体の質量を解析領域全体で質量保存を考慮し，鋭敏化 (=界面位置の移動) を行うため，誤差が大きな領域と小さな領域が混在しても，界面全体に誤差を分散させてしまうことに起因する．

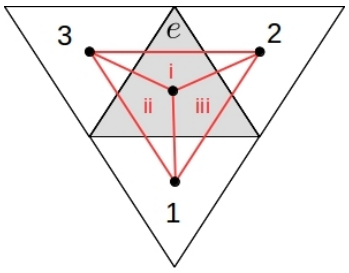
(3) DG 法による離散化

DG 法では，要素ごとに定義される補間関数を用いて離散化を行う．今，図-2 に示されるように，各要素内部の集合を $\tilde{\Omega}$，その要素境界の集合を Γ_{int} とし，基礎方程式 (1) を離散化すると，

$$\int_{\tilde{\Omega}} w \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}} \nabla w \cdot (\mathbf{u}\phi)\, d\Omega - \int_{\Gamma_{\text{int}}} [\![w]\!](\mathbf{u}\phi^{-}) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma = 0 \tag{9}$$



図–2 DG 法における離散化領域 (1 次元モデル)



図–3 Slope Limier のための補間空間

ここで，$[\![w]\!] = w^{+} - w^{-}$ であり，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} > 0$ の境界が + で表され，反対側が – で表される．空間方向へは要素ごとに定義される三角形 1 次要素を用い，時間方向へは 3 次精度の Runge-Kutta 法を用いる．DG 法でも界面の不連続性が保たれない場合やオーバーシュート，アンダーシュートなどの不安定性が現われる場合があるため，要素ごとの分布関数の傾きを制御する Slope Limiter 処理を施す．本報告では，1 次関数要素に対するシンプルな Slope Limiter[9] を適用する．この方法では，図-3 で示される要素 e に対して，隣接する要素 1 ~ 3 の図心位置を用いて補間関数 $L_{\triangle}$ を領域 i ~ iii において構築する．この補間関数を元に，各領域での勾配 $\nabla L_{\triangle}$ を求め，その勾配の大きなものから要素 e のエッジでオーバーシュート，アンダーシュートが無いか確認する．

$$\min(\phi_3, \phi_e) \leqq L_{\triangle}(x_{CA}) \leqq \max(\phi_3, \phi_e) \tag{10}$$

$$\min(\phi_2, \phi_e) \leqq L_{\triangle}(x_{BC}) \leqq \max(\phi_2, \phi_e) \tag{11}$$

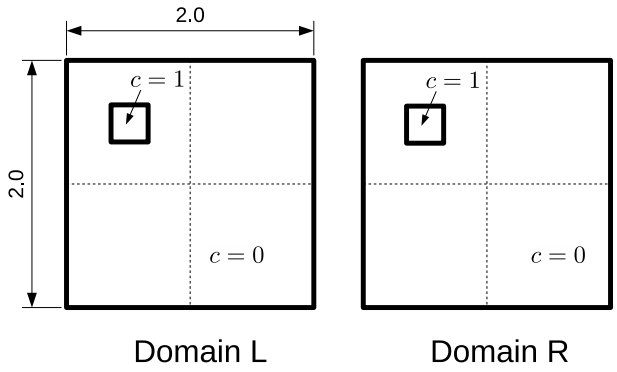
$$\min(\phi_1, \phi_e) \leqq L_{\triangle}(x_{AB}) \leqq \max(\phi_1, \phi_e) \tag{12}$$

以上を全て満たした場合は，その補間関数を用いて要素 e の分布を再構築する．満たさない場合は，勾配の小さな関数へ変更し，再度確認していく．この方法では，要素内の質量は変化しないので，前述の CG 法のような誤差の問題は発生しにくいと予想される．

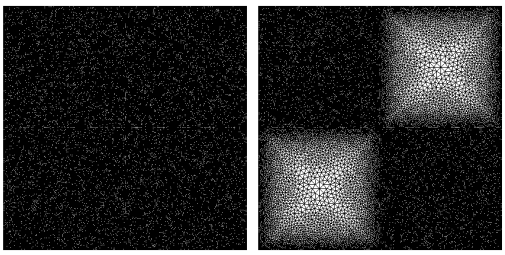
3. 数値解析例

(1) 解析モデル

数値解析例として，矩形分布の回転移流問題を取り上げる．図-4 に示すような，左右に領域が分かれているモデルを使用する．左右のモデルは，計算領域としてはひとつだが，物理的には分かれているモデルとなっている．解析メッシュは，図-5 に示すように，Domain R の第 1,3 象限の解像度が低くなっているものを用いる．解像度が高い部分のメッシュサイズは，0.01, 低い部分は 0.05 となっている．流速 $\mathbf{u}$ は，左右の各領域の中心座標 (x_c, y_c) を用い，$(u, v) = (-y_c, x_c)$ とした．



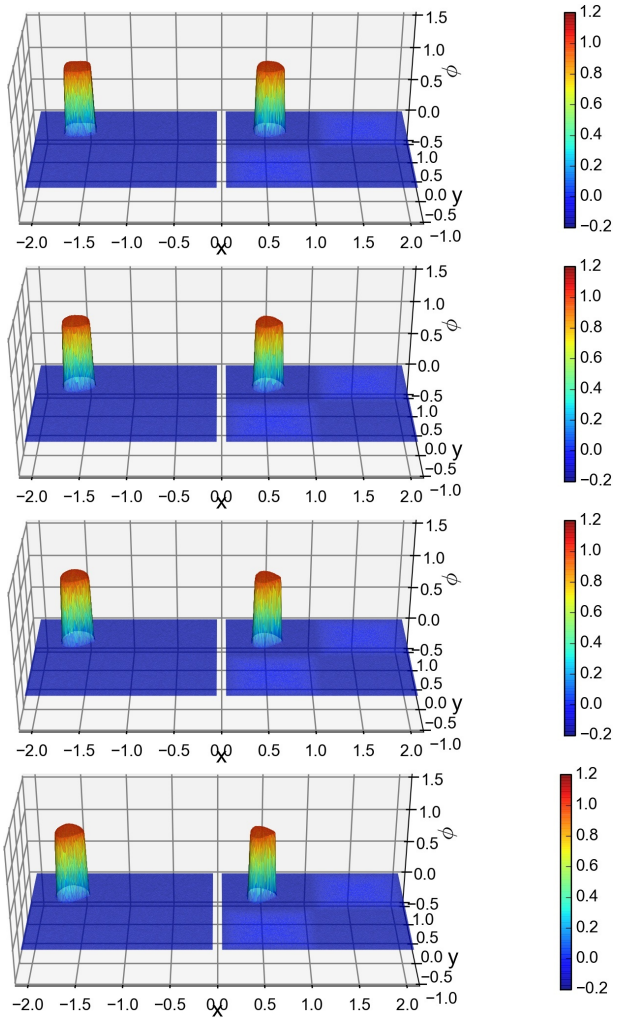
図–4 解析モデル



図–5 解析メッシュ

(2) 解析結果

解析結果として，図-6 に，各時刻における CG 法による結果の鳥瞰図を示す．Z 軸に VOF 関数を表示している．また，図-7 に DG 法による結果を示す．これらの結果より，CG 法による結果は界面鋭敏化の効果により，関数分布の不連続性は保持できているが，初期形状を保つことはできていないことが分かる．これは体積補正の影響もあり，解像度の荒い部分のある Domain R での誤差が両領域に平均化されていると考えられる．一方，図-7 に示される DG 法の結果は，本論文で用いた Slope Limiter では除去しきれないオーバーシュート，アンダーシュートが発生しているが，初期形状を維持しながら，解析を進めることができていることが分かる．VOF 関数の分布形状を確認するために，図-8 の時刻 Time=12.5(2 周後) における各手法での VOF 関数の平面分布を示す．CG 法による結果は，界面を鋭敏に保っているものの，形状が保てていない．一方で，DG 法による結果は初期形状を保っていることがわかる．また，図-9 に，各手法による左右の領域での分布の質量の時刻歴を示す．DG 法による結果は，初期質量と変動無く解析を進めることができているのに対し，CG 法による結果は，総量は同じではあるが，領域ごとでは増減をしていることが分かる．これは，体積補正を計算領域全体で行っているため，左右の領域間で質量が移動するという非現実的な結果となっている．以上の結果より，DG 法による解析結果は CG 法による解析結果よりも界面捕捉法における移流方程式の解法として優れていると言える．ただしそのためには，より効果的な Slope Limiter の適用や高次補間要素の使用によるオーバーシュート，アンダーシュートの除去が必要となり，



図–6 CG 法による VOF 関数の分布の鳥瞰図 (上より 1 周後，2 周後，3 周後，4 周後)

今後の課題である．

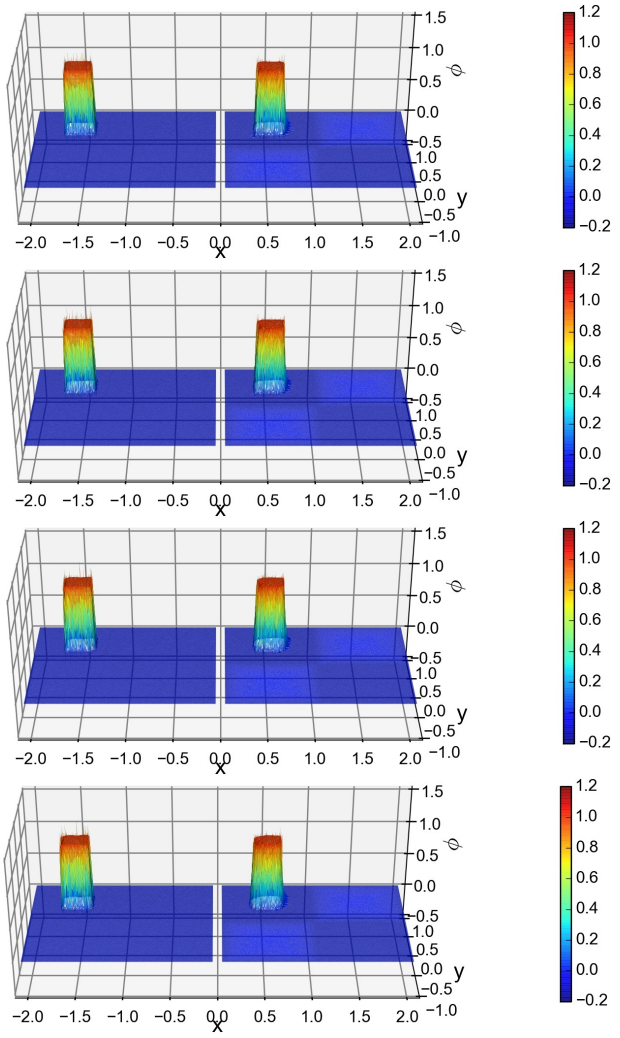
4. おわりに

本研究では，VOF 法に基づく自由表面流れ解析の移流方程式の解法として，DG 法を適用し，その有効性について検討した．安定化有限要素法に基づく CG 法と体積補正を組み合わせた補正手法の結果は，領域をまたいで質量が移動する不自然な結果となったが，局所的に質量保存を考える DG 法は，各領域で質量が保存される結果となった．今後の課題として，オーバーシュートやアンダーシュートを防ぐ Slope Limiter 手法の検討や，自由表面流れ解析への適用，三次元解析への適用などを行う予定である．

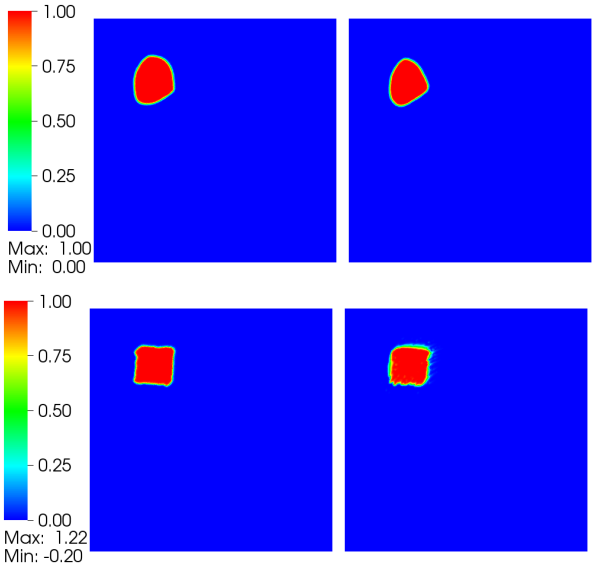
参考文献

[1] Hirt, C.W., Nichols, B.D. : Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, Vol.39, pp.201-225, 1981.

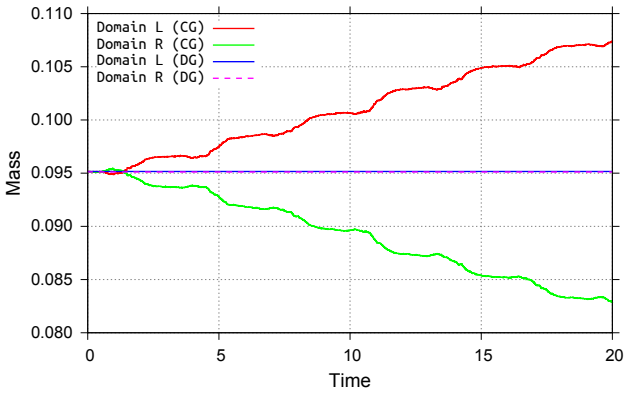
[2] Aliabadi, S. and Tezduyar, T. E. :Stabilized-finite-element/interface-capturing technique for parallel



図–7 DG 法による VOF 関数の分布の鳥瞰図 (上より 1 周後，2 周後，3 周後，4 周後)



図–8 T=12.5 での VOF 関数の分布 (上:CG 法, 下:DG 法)



図–9 各手法による領域ごとの質量の時刻歴

computation of unsteady flows with interfaces, *Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, pp.243-261, 2000.

[3] 桜庭雅明，弘崎聡，樫山和男 : 自由表面流れ解析のたまの CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕捉法の構築, 応用力学論文集, Vol.6, pp.215-222, 2003.

[4] 田中聖三，Sun，F.，堀宗朗，市村強，Wijerathne, M.L.L.: 動的津波荷重による構造物の破壊解析の基礎的研究, 土木学会論文集 A1(構造・地震工学), Vol.69, No.4, I_903-I_908, 2013.

[5] Cockburn, B., Karniadakis, G.E. and Shu, C.-W. : Discontinuous Galerkin Method, Springer, 2000.

[6] Aliabadi, S., Abedi, J. and Zellars, B. :Parallel finite element simulation of mooring forces on floating objects, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.41, pp.809-822, 2003.

[7] Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R. :Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.32, pp.199-259, 1982.

[8] Tezduyar, T. E. :Stabilized finite element formulation forincompressible flow computation, *Advances in Applied Mechanics*, Vol.28, pp.1-44, 1991.

[9] Durlofsky, I. J. : Triangle based adaptive stenciles for solution of hyperbolic conservation lows, *Journal of Computational Physics*, Vol.98, pp.64-73, 1992.